

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
 a.s. 2000/2001  
 Tema di MATEMATICA  
 Sessione suppletiva CORSO DI ORDINAMENTO

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione reale  $f_m$  di variabile reale  $x$  tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove  $m$  è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
- b) Indicata con  $C_1$  la curva rappresentativa della funzione  $f_1(x)$  corrispondente ad  $m=1$ , studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.
- c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $C_1$  e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

**PROBLEMA 2**

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è  $24 a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che  $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$  e che il piano della faccia VAB della

piramide forma col piano della base ABC un angolo  $\varphi$  tale che  $\sin \varphi = \frac{12}{13}$ .

- a) Calcolare l'altezza della piramide.
- b) Controllato che essa è  $\frac{24}{5}a$ , calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.
- c) Condotta, parallelamente alla base ABC, un piano  $\alpha$  che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di  $\alpha$  dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
- d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

**QUESTIONARIO**

1. Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia definita in un punto  $a$  è che sia continua in  $a$ .

B: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia continua in un punto  $a$  è che sia derivabile in  $a$ .

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

a) A vera – B vera; b) A vera – B falsa; c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani D'DE e C'CF dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo

reale, tale che:  $f(0) = 1$  ed  $f'(0) = 2$ . Calcolare:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\cos 2x - 1}$ .

5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione  $a^x$ , dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è  $a^x \ln a$ .

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione f(x) è  $x^2 + 2x$ . Se è possibile calcolare  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ , determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base [a,b] relativo alla funzione f(x), continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9. Calcolare la derivata della funzione  $\sin 2x$  rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione

10. Considerata una funzione reale di variabile reale f(x), derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione f(x) abbia in a un punto di flesso la condizione  $f''(a) = 0$  è:

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**PROBLEMA1**

Punto 1

- Dominio di definizione

Il dominio della funzione  $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$  è dato da  $x: |x-2m|+m \neq 0$ . Si presentano 2 possibilità:

1.  $m > 0$ : la condizione  $x: |x-2m|+m \neq 0$  è sempre soddisfatta;
2.  $m < 0$ : la condizione  $x: |x-2m|+m \neq 0$  è soddisfatta per  $x-2m \neq \pm m \Rightarrow x \neq \{m, 3m\}$ .

Il dominio di definizione di  $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$  è dunque  $D_f : \begin{cases} R & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$ .

- Dominio di continuità

Per quanto riguarda la continuità possiamo affermare che la funzione è continua in

$D_c : \begin{cases} R & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$  e nei punti  $x = m, x = 3m$  presenta due discontinuità di seconda specie.

- Dominio di derivabilità

La funzione  $f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$  è riscrivibile nel modo seguente:

$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m} = \begin{cases} \frac{x^2}{x-m} & \text{se } x \geq 2m \wedge x \neq m \\ \frac{x^2}{3m-x} & \text{se } x < 2m \wedge x \neq 3m \end{cases}$ ; di conseguenza la derivata prima è

$f'_m = \begin{cases} \frac{x^2 - 2xm}{(x-m)^2} & \text{se } x \geq 2m \wedge x \neq m \\ \frac{6mx - x^2}{(3m-x)^2} & \text{se } x < 2m \wedge x \neq 3m \end{cases}$ ; nei punti in cui la funzione non è continua non è

nemmeno derivabile, ed inoltre va analizzata la natura del punto  $x = 2m$ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2m^+} f'_m = \lim_{x \rightarrow 2m^+} \left[ \frac{x^2 - 2xm}{(x-m)^2} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2m^-} f'_m = \lim_{x \rightarrow 2m^-} \left[ \frac{6mx - x^2}{(3m-x)^2} \right] = 8m$$

Ricordando che  $m \neq 0$  per ipotesi, il punto  $x = 2m$  è un punto angoloso e quindi di non

derivabilità. In conclusione il dominio di derivabilità è  $D_d : \begin{cases} R - \{2m\} & \text{se } m > 0 \\ R - \{m, 2m, 3m\} & \text{se } m < 0 \end{cases}$ .

**Punto 2**

Per  $m = 1$  si ha  $f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1} = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{se } x > 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2}{3-x} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

Studiamo la funzione:

- *Dominio*: essendo  $m = 1 > 0$  il dominio è  $R$ ;
- *Intersezione asse ascisse*:  $f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- *Intersezione asse ordinate*:  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ;
- *Positività*: la funzione è sempre non negativa in quanto sia il numeratore che il denominatore sono sempre non negativi, cioè  $f_1 \geq 0 \forall x \in R$ ;
- *Asintoti verticali*: essendo  $m = 1 > 0$  il dominio di continuità è tutto  $R$  da cui deduciamo l'assenza di asintoti verticali;
- *Asintoti orizzontali*: non ve ne sono in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{|x-2|+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{|x-2|+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{3-x} \right) = +\infty$$

- *Asintoti obliqui*: hanno equazione  $y = mx + q$ . Si hanno due casi:

$$1. \quad x > 2: \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - x} \right) = 1, q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x-1} \right) = 1$$

per cui  $y = x + 1$  è asintoto obliquo destro:

$$2. \quad x < 2:$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{3x - x^2} \right) = -1, q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_1 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{3-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x}{3-x} \right) = -3 \text{ per}$$

cui  $y = -x - 3$  è asintoto obliquo sinistro:

- *Crescenza e decrescenza:* la derivata prima è  $f_1' = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{se } x > 2 \\ \frac{6x - x^2}{(3-x)^2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$ ; per  $x > 2$  la

derivata prima è  $f_1' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$  che è sempre positiva, per cui in  $(2, +\infty)$  la funzione è

strettamente crescente; per  $x < 2$  la derivata prima è  $f_1' = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2}$  per cui

$f_1' = \frac{x(6-x)}{(3-x)^2} > 0 \Rightarrow 0 < x < 2$ , cioè la funzione è strettamente decrescente in  $(-\infty, 0)$  e

strettamente crescente in  $(0, 2)$ . Quindi il punto  $m(0,0)$  è di minimo relativo ed assoluto. Il punto  $A(2,4)$  è un punto angoloso con tangente destra di equazione  $y = 4$  e tangente sinistra di equazione  $y = 8x - 12$ ;

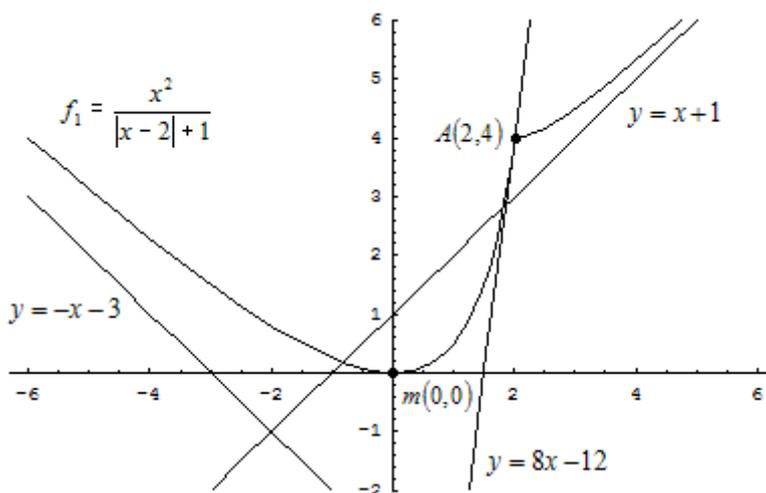
- *Concavità e convessità:* per  $x > 2$  la derivata seconda è  $f_1'' = \frac{2}{(x-1)^3}$  che è sempre positiva, per

cui in  $(2, +\infty)$  la funzione ha concavità verso l'alto; per  $x < 2$  la derivata seconda è

$f_1'' = \frac{18}{(3-x)^3}$  che è sempre positiva, per cui anche in  $(-\infty, 2)$  la funzione ha concavità verso

l'alto; in conclusione la funzione presenta sempre concavità verso l'alto.

Di seguito il grafico:



### Punto c

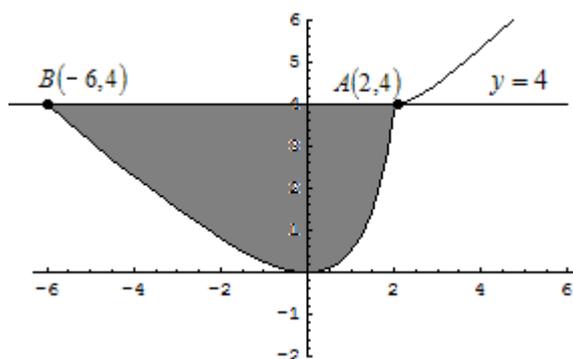
La retta passante per  $A(2,4)$  e parallela all'asse delle ascisse ha equazione  $y = 4$ . Le intersezioni di

$y = 4$  con la curva di equazione  $f_1 = \frac{x^2}{|x-2|+1}$  si ricavano risolvendo l'equazione  $\frac{x^2}{|x-2|+1} = 4$ ,

cioè  $\begin{cases} x^2 = 4(x-1) & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 = 4(3-x) & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 + 4x - 12 = 0 & \text{se } x < 2 \end{cases}$  da cui

$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 & \text{se } x \geq 2 \\ (x+6)(x-2) = 0 & \text{se } x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{se } x \geq 2 \\ x = -6 \vee x = 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ . Le intersezioni sono allora

$A(2,4), B(-6,4)$ . L'area da calcolare è di seguito colorata in grigio:



Tale area vale:

$$S = \int_{-6}^2 \left[ 4 - \left( \frac{x^2}{3-x} \right) \right] dx = \int_{-6}^2 \left[ 4 - \left( \frac{x^2 - 9}{3-x} + \frac{9}{3-x} \right) \right] dx = \int_{-6}^2 \left[ 4 - \left( -x - 3 + \frac{9}{3-x} \right) \right] dx =$$

$$= \int_{-6}^2 \left( x + 7 - \frac{9}{3-x} \right) dx = \left[ \frac{(x+7)^2}{2} + 9 \ln|3-x| \right]_{-6}^2 = \left( \frac{81}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + 9 \ln 9 \right) = 40 - 18 \ln 3$$

**PROBLEMA2**

**Punto a**

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentata la piramide con base un triangolo rettangolo in A in cui è inscritta una circonferenza di raggio  $\overline{OH}$ . Il cateto

AC per il teorema di Pitagora, sapendo che  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ ,

misura

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{25}{9} \overline{AB}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{4}{3} \overline{AB}.$$

L'area del triangolo rettangolo è allora

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{2}{3} \overline{AB}^2.$$

Imponendo  $S_{ABC} = \frac{2}{3} \overline{AB}^2 = 24a^2$  ricaviamo

$$\overline{AB} = 6a, \overline{AC} = 8a, \overline{BC} = 10a.$$

Il raggio della circonferenza inscritta è pari al rapporto tra area e semiperimetro del triangolo

rettangolo e cioè  $\overline{OH} = \frac{24a^2}{12a} = 2a$ , per cui l'altezza della piramide misura

$$\overline{VO} = \overline{OH} \cdot \tan \varphi = \overline{OH} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \overline{OH} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = 2a \cdot \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}} = 2a \cdot \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{24}{5} a.$$

**Punto b**

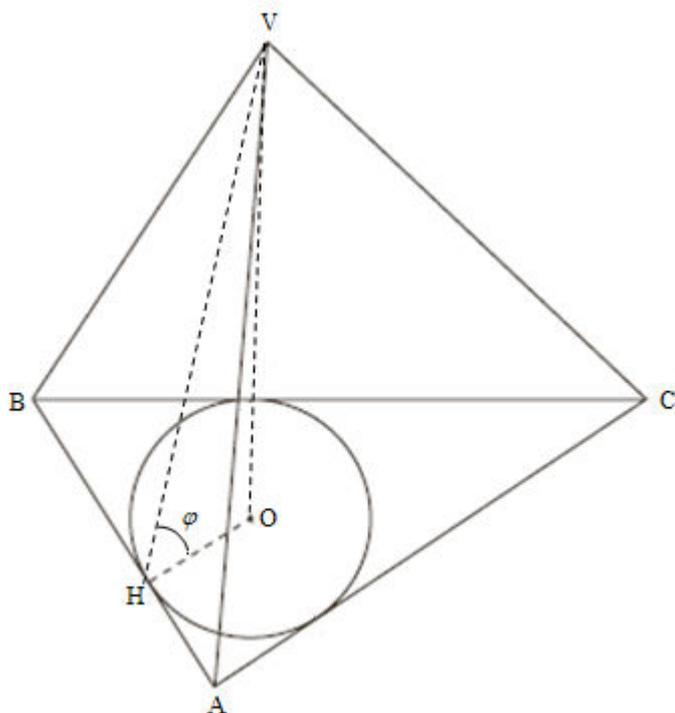
Se indichiamo con  $h$  la distanza di C dalla faccia VAB, essa è altezza della piramide di base VAB.

L'area del triangolo VAB è  $S_{VAB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VH}}{2}$  dove  $\overline{VH} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{\frac{576}{25} a^2 + 4a^2} = \frac{26}{5} a$ ;

di conseguenza  $S_{VAB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{VH}}{2} = \frac{6a \cdot \frac{26}{5} a}{2} = \frac{78}{5} a^2$  cui corrisponde il volume della piramide

$V = \frac{S_{VAB} \cdot h}{3} = \frac{26}{5} a^2 h$ . Ma il volume della piramide è anche pari a

$V = \frac{S_{ABC} \cdot \overline{VO}}{3} = \frac{24a^2 \cdot \frac{24}{5} a}{3} = \frac{192}{5} a^3$ ; imponendo l'uguaglianza tra i due volumi si ha



$$\frac{26}{5}a^2h = \frac{192}{5}a^3 \Rightarrow h = \frac{96}{13}a.$$

**Punto c**

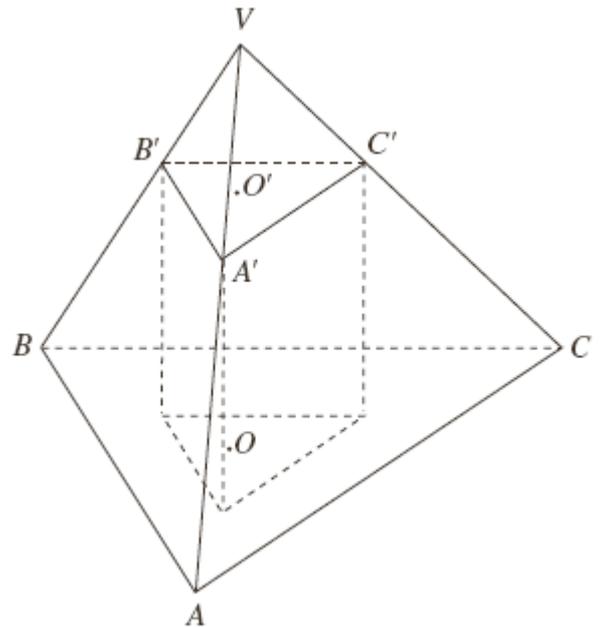
Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del quesito. Poniamo  $\overline{VO'} = x$  con  $0 < x < \frac{24}{5}a$ , per cui

l'altezza del prisma è  $\overline{OO'} = \left(\frac{24}{5}a - x\right)$ .

I triangoli ABC e A'B'C' sono simili in quanto il piano  $\alpha$  è parallelo alla base, per cui vale la seguente proporzione tra perimetri di base ed altezze:

$$2p_{ABC} : 2p_{A'B'C'} = \overline{VO} : \overline{VO'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p_{A'B'C'} = 2p_{ABC} \cdot \frac{\overline{VO'}}{\overline{VO}} = 24a \cdot \left(\frac{x}{\frac{24}{5}a}\right) = 5x.$$



Dalla similitudine tra i triangoli ABC ed A'B'C' deduciamo che i lati del triangolo A'B'C' stanno nello stesso rapporto dei lati di ABC e cioè 3, 4, 5, cioè  $A'B':B'C':A'C'=3:4:5$  da cui componendo la proporzione si ricava

$$(A'B'+B'C'+A'C'):A'B' = (3+4+5):AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2p_{A'B'C'} : 2p_{ABC} = \overline{A'B'} : \overline{AB} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot \frac{2p_{A'B'C'}}{2p_{ABC}} = 6a \cdot \frac{5x}{24a} = \frac{5}{4}x.$$

Di conseguenza  $\overline{A'C'} = \frac{5}{3}x, \overline{B'C'} = \frac{25}{12}x$  e l'area del triangolo A'B'C' è

$$S_{A'B'C'} = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}}{2} = \frac{25}{24}x^2. \quad \text{Il volume del prisma è}$$

$$V_p(x) = S_{A'B'C'} \cdot \overline{OO'} = \frac{25}{24}x^2 \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right) = 5ax^2 - \frac{25}{24}x^3 \quad \text{con } 0 < x < \frac{24}{5}a.$$

Il valore massimo del volume lo calcoliamo mediante derivazione:  $V'_p(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2$  per cui

$$V'_p(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2 > 0 \xrightarrow{0 < x < \frac{24}{5}a} 0 < x < \frac{16}{5}a$$

$$V'_p(x) = 10ax - \frac{25}{8}x^2 < 0 \xrightarrow{0 < x < \frac{24}{5}a} \frac{16}{5}a < x < \frac{24}{5}a$$

da cui deduciamo che il volume massimo lo si ha per  $x = \frac{16}{5}a$  e quindi quando l'altezza del prisma

misura  $\overline{OO'} = \left(\frac{24}{5}a - \frac{16}{5}a\right) = \frac{8}{5}a$  e tale volume massimo vale

$$V_P\left(\frac{16}{5}a\right) = 5a \cdot \left(\frac{16}{5}a\right)^2 - \frac{25}{24}\left(\frac{16}{5}a\right)^3 = \frac{256}{15}a^3.$$

**Punto d**

L'area totale del prisma è pari alla somma delle due aree di base e dell'area laterale:

$$\begin{aligned} S_P(x) &= 2S_{A'B'C'} + 2p_{A'B'C'} \cdot \overline{OO'} = \frac{25}{12}x^2 + 5x \cdot \left(\frac{24a - 5x}{5}\right) = 24ax - \frac{35}{12}x^2 \\ &= \frac{(24a - 5x)(24a + 7x)}{12} = -\frac{35}{12}x + 4ax + 48a^2 \quad \text{con } 0 < x < \frac{24}{5}a. \end{aligned}$$

Notiamo che l'area totale è un arco di parabola con concavità verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice e cioè in  $x = -\frac{24a}{-35} = \frac{144}{35}a$  cui corrisponde  $-\frac{6}{6}$

$\overline{OO'} = \left(\frac{24a}{5} - \frac{144}{35}a\right) = \frac{24}{35}a$ . In conclusione il prisma di volume massimo non coincide con quello di area totale massima in quanto le altezze massime non coincidono.

**QUESTIONARIO**

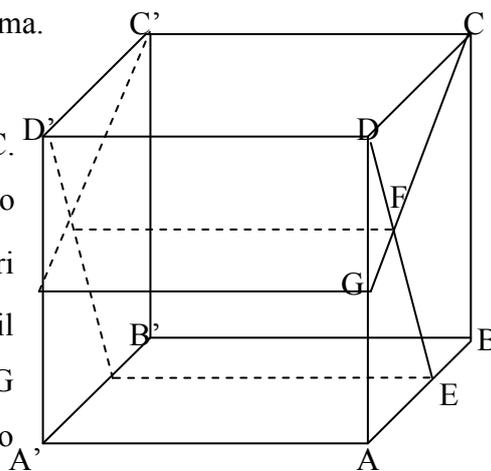
**Quesito 1**

La risposta esatta è D. Infatti la proposizione A è falsa perché una funzione può essere definita in un punto senza esservi continua, come per  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$  che è definita ma non è continua in  $x = 0$ ; inoltre la proposizione B è falsa perché una funzione può essere continua e non derivabile in un punto assegnato come per  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  che in  $x = 0$  presenta una cuspidale ma è ivi continua.

**Quesito 2**

Consideriamo la figura a lato rappresentante la geometria del problema.

Indichiamo con  $l$  la misura dello spigolo del cubo e con  $V_1, V_2, V_3, V_4$  i volumi dei prismi retti di base DFG, DFC, FGAE e FEBC. Notiamo innanzitutto che i triangoli rettangoli CDG e DAE sono congruenti avendo  $AD=DC$  e  $\hat{C}GD = \hat{A}ED$  in quanto complementari di  $\hat{A}DE$ , per cui  $DG=AE$ . I suddetti triangoli hanno in comune il triangolo DFG, per cui sottraendo ad essi l'area del triangolo DFG deduciamo che il triangolo DFC ed il quadrilatero FGAE hanno stessa area; inoltre, poiché l'altezza dei prismi con base



DFC, FGAE è la stessa e coincide con la lunghezza dello spigolo del cubo, deduciamo che  $V_2 = V_3$ .

Essendo  $\overline{DG} = \overline{AE} = \frac{l}{2}$  si ha per il teorema di Pitagora  $\overline{DE} = \overline{CG} = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{5}}{2}$ ; per i teoremi di Euclide si ha invece:

$$\overline{FG} = \frac{\overline{DG}^2}{\overline{CG}} = \frac{\frac{l^2}{4}}{\frac{l\sqrt{5}}{2}} = \frac{l\sqrt{5}}{10}, \overline{DF} = \sqrt{\overline{CF} \cdot \overline{FG}} = \sqrt{(\overline{CG} - \overline{FG}) \cdot \overline{FG}} = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{5}}{2} - \frac{l\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{l\sqrt{5}}{10}} = \frac{l\sqrt{5}}{5} \text{ per}$$

cui l'area del triangolo DFG è  $S_{DFG} = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{FG}}{2} = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{l\sqrt{5}}{10}}{2} = \frac{l^2}{20}$  da cui deduciamo

$$V_1 = \frac{l^3}{20} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{20}; \text{ di conseguenza } S_{DFC} = S_{FGAE} = S_{CDG} - S_{DFG} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{20} = \frac{l^2}{5} \text{ da cui}$$

deduciamo  $V_2 = V_3 = \frac{l^3}{5} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{V_3}{V} = \frac{1}{5}$  e

$$\frac{V_4}{V} = \frac{V - V_1 - V_2 - V_3}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} - \frac{V_2}{V} - \frac{V_3}{V} = 1 - \frac{1}{20} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}.$$

**Quesito 3**

Ricordando che  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  si ha  $2^n = 1048576 = 2^{20} \Rightarrow n = 20$ .

**Quesito 4**

Il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}$  si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  per cui possiamo applicare il

teorema di De L'Hospital, e ricordando che per il teorema fondamentale del calcolo

integrale  $\frac{d\left(\int_0^x f(t)dt\right)}{dx} = f(x)$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2 \sin 2x}$ ; il limite ottenuto si presenta

ancora nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , per cui riapplicando il teorema di De L'Hospital otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{-2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{-4 \cos 2x} = -\frac{f'(0)}{4} = -\frac{1}{2}.$$

**Quesito 5**

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ a^x \left( \frac{a^h - 1}{h} \right) \right] = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \cdot \ln a$$

risultato noto  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{a^h - 1}{h} \right) = \ln a$ .

**Quesito 6**

Indichiamo con  $2p$  il perimetro del rettangolo e con  $x, (p-x)$  con  $0 < x < p$  le sue dimensioni.

L'area corrispondente vale  $S(x) = x(p-x) = xp - x^2$ ; tale area è un arco di parabola con concavità

rivolta verso il basso che raggiunge il suo massimo nell'ascissa del vertice  $x = \frac{p}{2}$ . In

corrispondenza di  $x = \frac{p}{2}$  il rettangolo degenera in un quadrato, per cui il rettangolo di area

massima è un quadrato di lato  $x = \frac{p}{2}$ .

Alternativamente possiamo procedere mediante derivazione. In questo caso la derivata prima della

funzione area è  $S'(x) = p - 2x$  per cui  $S(x)$  è strettamente crescente in  $\left(0, \frac{p}{2}\right)$  e strettamente

decrecente in  $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ ; inoltre  $S''(x) = -2 < 0$  da cui deduciamo la presenza di un massimo relativo per  $x = \frac{p}{2}$ .

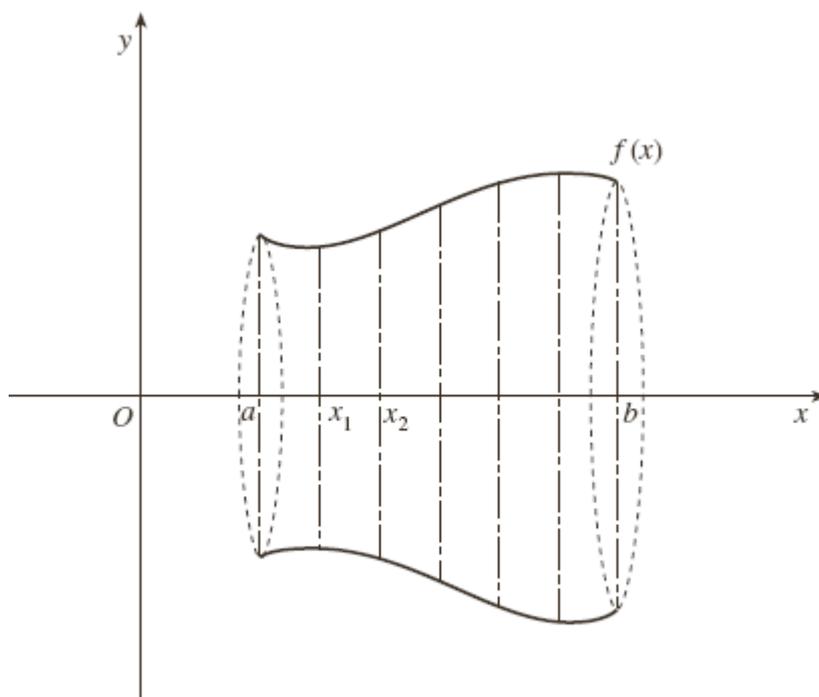
**Quesito 7**

Operando la sostituzione  $t = \frac{x}{2}$  l'integrale  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$  diventa  $2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 2 \left[ t^2 + 2t \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left( \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5}{2}$ .

**Quesito 8**

Consideriamo la figura a lato in cui è rappresentato il trapezoide delimitato dalla curva di equazione  $y = f(x)$ , dall'asse delle  $x$  e dalle rette  $x = a, x = b$ .

Se la funzione  $f(x)$  è costantemente pari a  $K$ , il trapezoide  $T$  è un rettangolo e il solido di rotazione conseguente è un cilindro di altezza  $(b - a)$  e base  $K^2 = f^2(x)$  il cui volume è  $V = \pi \cdot K^2 \cdot (b - a) = \pi \cdot f^2(x) \cdot (b - a)$ . Se la curva di equazione  $y = f(x)$  non è costante, si può procedere seguendo i seguenti passi:



1. si suddivide  $[a, b]$  in  $n$  sottointervalli equispaziati:

$$x_0 = a, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots, x_{n-1} = x_{n-2} + h, x_n = b \text{ dove } h = \frac{b-a}{n};$$

2. si calcola per ogni sottointervallo il valore minimo  $m_i$  e massimo  $M_i$  della funzione  $f(x)$  che corrispondono alle altezze dei rettangoli corrispondenti al sottointervallo  $i$ ;

3. si determinano le somme  $v_n = \pi \cdot \sum_{i=1}^n \left[ (m_i)^2 \cdot \left( \frac{b-a}{n} \right) \right], V_n = \pi \cdot \sum_{i=1}^n \left[ (M_i)^2 \cdot \left( \frac{b-a}{n} \right) \right]$

rappresentanti le somme dei volumi di tutti i cilindri che hanno per base un cerchio di raggio minimo  $m_i$  e massimo  $M_i$  e che forniscono l'approssimazione per difetto e per eccesso del volume generato dalla rotazione del trapezoide intorno all'asse delle ascisse,  $v_n \leq V \leq V_n$ ;

4. facendo un ragionamento al limite, per  $n \rightarrow +\infty$ , i sottointervalli di  $[a, b]$  aumentano e i rettangoli corrispondenti al sottointervallo  $i$  avranno a limite un'altezza infinitesima o nulla; dunque per  $n \rightarrow +\infty$ , passando dal discreto al continuo, il simbolo di sommatoria può essere sostituito da quello di integrale ed i valori  $(m_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$  e  $(M_i)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$  coincidono con i valori assunti dalla funzione  $f^2(x)$ ; in sostanza  $V = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$ .

### Quesito 9

Applicando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si ha:

$$\frac{d(\sin 2x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(2x + 2h) - \sin(2x)}{h} \right]. \text{ Applicando la formula di prostaferesi}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ si ha}$$

$$\frac{d(\sin 2x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin(2x + 2h) - \sin(2x)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2 \cos(2x + h) \cdot \sin(h)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [2 \cos(2x + h)] \cdot \overbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}}{=1} = 2 \cos 2x.$$

### Quesito 10

La risposta corretta è la b) cioè la condizione è necessaria ma non sufficiente. Come contro esempio consideriamo la funzione  $y = x^4$  che ha come derivata seconda  $y'' = 12x^2$  che si annulla in  $x = 0$  ma è altrove sempre positiva, per cui  $y = x^4$  volge sempre concavità verso l'alto e non ammette flessi.